Μαθημα 1ο

21/5/2018

Ολοκληρωτικές Εξ.

Κεφάλαιο 4ο

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Fredholm

- $y(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)\, y(s)\, ds$

Θα ασχοληθώ με ολοκλ. Εξ της παραπάνω μορφής όπου

$$k(t,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, b_k(s)$$

Ένας τέτοιος πυρήνας λέγεται διαχωρίσιμος

π.χ $k(t,s) = t+s$

$a_1(t) = t,\quad b_1(s) = 1 \quad a_2(t) = 1 \quad b_2(t) = s$

Επίσης έστω $k(t,s) = \sin(t-s) = \sin t \cos s - \sin s \cos t$

Παράδειγμα 1

Έστω $y(t) = 2t + \lambda \int_0^1 e^t e^s y(s)\, ds$

Να λυθεί η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση

απάντηση

$y(t) = 2t + \lambda e^t \int_0^1 e^s y(s)\, ds$

Έστω $c = \int_0^1 e^s y(s)\, ds$ (1)

οπότε η y παίρνει τη μορφή

$$y(t) = 2t + \lambda e^t c \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) με χρήση της (2)

$c = \int_0^1 e^s (2s + \lambda e^s c)\, ds = 2\int_0^1 e^s s\, ds + \lambda \int_0^1 e^s e^s c\, ds = \dots =$

$= 2e - 2(e-1) + \lambda c \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

Άρα

$$c(2-\lambda(e^2-1))=4$$

Αν $\lambda \neq \frac{2}{e^2-1}$ τότε $c=\frac{4}{2-\lambda(e^2-1)}$ (3)

και από τη σχέση (2) λόγω της (3) έχουμε

$$y(t)=2t+\lambda e^t \frac{4}{2-\lambda(e^2-1)}$$

Αν $\lambda=\frac{2}{e^2-1}$ η εξίσωση δεν έχει λύση

$$\left(\int_0^1 f(s)\,b(s)\,ds \;\dots = 2 \neq 0\right)$$

▸ Γενική μορφή

Έστω $k(t,s)=g(t)h(s)$, $t,s \in [a,b]$ όπου g, h είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ τότε

$$y(t)=f(t)+\lambda\int_a^b g(t)\,h(s)\,y(s)\,ds$$

$$= f(t)+\lambda\cdot g(t)\int_a^b h(s)\,y(s)\,ds$$

Έστω $c=\int_a^b h(s)\,y(s)\,ds$ (3) οπότε $y(t)=f(t)+\lambda g(t)\cdot c$ (4)

από την (3) λόγω (4) έχουμε

$$c=\int_a^b h(s)\,(f(s)+\lambda g(s)\cdot c)\,ds=\int_a^b h(s)f(s)\,ds+\lambda\int_a^b h(s)\,g(s)\,ds$$

Άρα

$$c-\lambda c\int_a^b h(s)\,f(s)\,ds=\int_a^b h(s)\,f(s)\,ds$$

$$c\left(1-\lambda\int_a^b h(s)\,g(s)\,ds\right)=\int_a^b h(s)\,f(s)\,ds \quad (5)$$

Εάν $1-\lambda\int_a^b h(s)g(s)ds \neq 0$ τότε έχουμε ότι

$$c = \frac{\int_a^b h(s)f(s)ds}{1-\lambda\int_a^b h(s)g(s)ds}$$

και $y(t) = f(t) - \lambda g(t) \dfrac{\int_a^b h(s)f(s)ds}{1-\lambda\int_a^b h(s)g(s)ds}$

Εάν $1-\lambda\int_a^b h(s)g(s)ds = 0$ τότε η (5) δεν έχει λύση

εάν $\int_a^b h(s)f(s)ds \neq 0$

- Έστω λ_1 η τιμή του λ όπου ικανοποιεί την

$$1-\lambda_1\int_a^b h(s)g(s)ds$$

και $f_1 = \int_a^b h(s)f(s)ds$

τότε $\lambda=\lambda_1$ και $f_1=0$ η εξίσωση (5) έχει λύση οποιοδήποτε σταθερά c. Άρα η ολοκληρωτική εξίσωση έχει λύση την

$$y(t) = f(t) + c\, y_1(t) \quad \text{όπου} \quad y_1(t) = g(t)$$

Έχουμε $1 = \lambda_1\int_a^b h(s)g(s)ds$, $y_1(t) = \lambda_1 y_1(t)\int_a^b h(s)g(s)ds$

η $g(t) = \lambda_1\int_a^b g(t)h(s)g(s)ds = \lambda_1\int_a^b K(t,s)g(s)ds$

Η g που ικανοποιεί αυτή τη σχέση λέγεται ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1

▶ Έστω $K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, b_i(s)$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις

στο $[a,b]$ δηλ

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Έστω π.χ $c_1 \neq 0$ τότε

$$c_1 a_1 = -c_2 a_2 - c_3 a_3 - \dots - c_n a_n$$

$$a_1 = -\frac{c_2}{c_1} a_2 - \frac{c_3}{c_1} a_3 - \dots - \frac{c_n}{c_1} a_n$$

και τότε

$$\sum a_i(t)\, b_i(s) = a_1(t)\, b_1(s) + a_2(t)\, b_2(s) + \dots + a_n(t)\, b_n(s)$$

$$= \left(-\frac{c_2}{c_1} a_2 - \frac{c_3}{c_1} a_3 - \dots - \frac{c_n}{c_1} a_n\right) b_1(s) + \dots + a_n(t)\, b_n(s)$$

$$= a_2(t)\, \ell_2(s) + a_3(t)\, \ell_3(s) + \dots + a_n(t)\, \ell_n(s)$$

Έστω λοιπόν $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b a_1(t)\, b_1(s)\, y(s)\, ds + \lambda \int_a^b a_2(t)\, b_2(s)\, y(s)\, ds + \dots +$$

$$+ \lambda \int_a^b a_n(t)\, b_n(s)\, y(s)\, ds$$

Έστω λοιπόν

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\, y(s)\, ds \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

τότε

$$y(t) = f(t) + \lambda c_1 a_1(t) + \lambda c_2 a_2(t) + \dots + \lambda c_n a_n(t) \quad (3)$$

με αντικατάσταση της ③ στην ② έχω

$$c_r(t) = \int_a^b b_r(s)\,(f(s) + \lambda c_1 a_1(s) + \dots + \lambda c_n a_n(s)) =$$

$$= \int_a^b b_r(s)\, f(s)\, ds + \lambda c_1 \int_a^b b_r(s)\, a_1(s)\, ds + \dots + \lambda c_n \int_a^b b_r(s)\, a_n(s) \quad ④$$

οπότε εάν

$$f_r = \int_a^b b_r(s)\, f(s)\, ds$$

$$A_{rj} = \int_a^b b_r(s)\, a_j(s)\, ds$$

έχουμε από την ④ ότι

$$c_r(t) = f_r + \lambda c_1 A_{r1} + \lambda c_2 A_{r2} + \dots + \lambda c_n A_{rn}$$

$$c_r(t) - \lambda c_1 A_{r1} - \lambda c_2 A_{r2} - \dots - \lambda c_n A_{rn} = f_r \quad , r = 1, 2, \dots, n$$

οπότε έχουμε το σύστημα

$$c_1(1 - \lambda A_{11}) - \lambda A_{12} c_2 - \dots - \lambda A_{1n} c_n = f_1$$

$$-\lambda A_{21} c_1 + (1 - \lambda A_{22}) c_2 - \dots - \lambda A_{2n} c_n = f_2$$

$$\vdots$$

$$-\lambda A_{n1} c_1 - \lambda A_{n2} c_2 - \dots - (1 - \lambda A_{nn}) c_n = f_n$$

σύστημα εξισώσεων $n \times n$ με αγνώστους τα $c_1, c_2, \dots, c_n$

Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}$$

Η $D(\lambda)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς λ

(εφόσον $D(0) = |I| = 1$)

Επομένως για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με διαχωρίσιμο πυρήνα οδηγούμαστε στην επίλυση ενός γραμμ. συστήματος με αγνώστους $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Εάν $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

και $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

Τότε το σύστημα παίρνει τη μορφή $(I - \lambda A)C = f$ το οποίο έχει μοναδική λύση όταν $|I - \lambda A| \neq 0$ και έχει άπειρες ή καμία εάν $|I - \lambda A| = 0$

~~Άσκηση~~

Να λυθεί η ολοκλ. εξίσωση Fredholm

$$y(t) = t + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t \sin s + t \cdot \cos s + s^2 \sin t)\, y(s)\, ds$$

Λύση

$n = 3$, $a_1(t) = \cos t$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = \sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$

$b_1(s) = \sin s$ $b_2(s) = \cos s$ $b_3(s) = s^2$

Οι $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$

Οι συναρτήσεις a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες

διότι $\quad c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$

$$c_1 a_1(t) + c_2 a_2(t) + c_3 a_3(t) = 0$$

για $\quad t_1 = -\pi, \quad t_2 = \pi/2, \quad t_3 = \pi$

έχουμε το σύστημα

$$c_1 a_1(-\pi) + c_2 a_2(-\pi) + c_3 a_3(-\pi) = 0$$

$$c_1 a_1(\pi/2) + c_2 a_2(\pi/2) + c_3 a_3(\pi/2) = 0$$

$$c_1 a_1(\pi) + c_2 a_2(\pi) + c_3 a_3(\pi) = 0$$

Τότε έδωσαν

$$\begin{vmatrix} a_1(-\pi) & a_2(-\pi) & a_3(-\pi) \\ a_1(\pi/2) & a_2(\pi/2) & a_3(\pi/2) \\ a_1(\pi) & a_2(\pi) & a_3(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\pi & 0 \\ 0 & \pi/2 & 1 \\ -1 & \pi & 0 \end{vmatrix} = 4\pi \neq 0$$

Εάν $\quad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} b_n(s)\, y(s)\, ds \quad (1)$

$$y(t) = f(t) + c_1 \cdot \lambda\, a_1(t) + c_2 \lambda\, a_2(t) + c_3 \lambda\, a_3(t) =$$

$$= t + c_1 \lambda \cos t + c_2 \cdot \lambda \cdot t + c_3 \lambda \sin t \quad (2)$$

οπότε από την (1) λόγω της (2) έχουμε

$$c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(s) \left(s + c_1 \lambda \cos s + c_2 \cdot \lambda \cdot s + c_3 \lambda \sin s \right) ds$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot s\, ds + c_1 \cdot \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cos s\, ds + c_2 \cdot \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot s\, ds + c_3 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 s\, ds$$

$$= \dots = 2\pi + \frac{1}{4} c_1 \cdot \lambda \cdot 0 + 2\pi \cdot c_2 \cdot \lambda + c_3 \cdot \lambda \cdot \pi$$

οπότε

$$c_1 - 2\pi\lambda c_2 - c_3\lambda\pi = 2\pi \quad (3)$$

όμοια

$$c_2 = \int_{-\pi}^{\pi} b_2(s)\, y(s)\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\,(s + c_1\lambda\cos s + c_2\lambda s + c_3\lambda\sin s)\, ds$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \cdot s\, ds + c_1\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s\, ds + c_2\lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos s)\, s\, ds +$$

$$+ c_3\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \sin s\, ds = \dots = c_1\lambda\pi$$

Δηλαδή

$$c_1\lambda\pi - c_2 = 0 \quad (4)$$

Επίσης

$$c_3 = \int_{-\pi}^{\pi} s^2\,(s + c_1\lambda\cos s + c_2\lambda s + \lambda c_3\sin s)\, ds = \dots = -4c_1\lambda\pi$$

Άρα $\quad 4\lambda\pi c_1 + c_3 = 0 \quad (5)$

Άρα έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 - 2\pi\lambda c_2 - \lambda\pi c_3 &= 0 \\ \lambda\pi c_1 - c_2 &= 0 \\ 4\lambda\pi c_1 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

η ορίζουσα των συντελεστών είναι

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -2\pi\lambda & -\lambda\pi \\ \lambda\pi & -1 & 0 \\ 4\lambda\pi & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -(1 + 2\lambda^2\pi^2) \neq 0$$

Επομενως εχει μοναδικη λυση που ειναι

$$c_1 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$c_2 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$c_3 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

οποτε

$$y(t) = t + \frac{2\pi\lambda}{1+2\lambda^2\pi^2}\cos t + \frac{2\lambda^2\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\cdot t - \frac{8\lambda^2\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\sin t$$

- Εαν εχουμε μια ομογενη ολοκληρωτικη εξισωση

$$y(t) = \lambda\int_a^b k(t,s)\,y(s)\,ds$$

με $k(t,s)$ διαχωρισιμο

εαν εργαστουμε οπως πριν θα καταληξουμε στο συστημα

$$(I-\lambda A)\cdot c = 0$$

Εαν $|I-\lambda A| \neq 0$ τοτε το συστημα εχει μοναδικη λυση τη μηδενικη

και σε αυτη τη περιπτωση η λυση της ολοκλ. εξισωσης

$$y(t) = f(t) + \lambda\sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k(t) = 0$$

Εαν η οριζουσα $|I-\lambda A| = 0$ η ομογενης ολοκλ. εξισωση

μπορει να εχει απειρες ή καμια λυση

Σε αυτη τη περιπτωση για τιμες του λ που μηδενιζουν την οριζουσα

αναζητουμε μη μηδενικες λυσεις.

Μια τιμή του $\lambda \neq 0$ για την οποία $|I - \lambda A| = 0$ και υπάρχει μη μηδενική λύση τότε λ λέγεται ιδιοτιμή και η μια μη μηδενική λύση ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή

~~Άσκηση~~

Να βρείτε τη μη τετριμμένη λύση της Fredholm ολοκλ. εξίσωσης αν υπάρχει

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^{\pi} \cos(t-s)\, y(s)\, ds$$

Λύση

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^{\pi} (\cos t \cos s + \sin t \sin s)\, y(s)\, ds$$

$a_1(t) = \cos t \qquad a_2(t) = \sin t$

$b_1(s) = \cos s \qquad b_2(s) = \sin s$

a_1, a_2, b_1, b_2 συνεχείς στο $[0,\pi]$ και a_1, a_2 γραμ. ανεξ.

Τότε

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \lambda c_1 \cos t + \frac{2}{\pi} \lambda c_2 \sin t$$

όπου

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds \quad (2) \qquad c_2 = \int_0^{\pi} \sin s\, y(s)\, ds \quad (3)$$

με αντικατάσταση της (1) στις (2) και (3) έχουμε

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos s \left(\frac{2}{\pi} \lambda c_1 \cos s + \frac{2}{\pi} \lambda c_2 \cos s \right) ds = \dots = \lambda c_1$$

ομοια

$$c_2 = \int_0^{\pi} \sin s \; y(s)\, ds = \int_0^{\pi} \sin s \left(\frac{2\lambda}{\pi} c_1 \cos s + \frac{2\lambda}{\pi} c_2 \sin s \right) ds = \dots = \lambda c_2$$

οποτε η τιμη του λ που μπορει να τοποθετηθει στις παραπανω ισοτητες ωστε να αληθευουν ειναι $\lambda = 1$

οποτε

$y(t) = \frac{2}{\pi} c_1 \cos t + \frac{2}{\pi} c_2 \sin t$ οπου c_1, c_2 ειναι αυθαιρετες σταθερες

Προσεγγιστικες μεθοδοι

Εστω

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, y(s)\, ds$$

τοτε εαν $y_0(t) = f(t)$

$$y_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, y_0(s)\, ds$$

$\vdots$

$$y_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)\, y_{n-1}(s)\, ds$$

n-οστη προσεγγιση

εαν το $\lim_n y_n(t) = y(t)$

π.χ. να λυθει την ολοκλ. εξ.

$$y(t) = 1 + \int_0^1 t\, u(s)\, ds$$

απαντηση

$y_0(t) = 1$

$y_1(t) = 1 + \int_0^1 t \cdot 1 \, ds = 1 + t$

$y_2(t) = 1 + \int_0^1 t(1+s)\, ds = 1 + t\left(1 + 1/2\right)$

Scanned by CamScanner

$$y_3(t) = 1 + \int_0^1 t\, y_2(s)\, ds = 1 + \int_0^1 t \cdot (1 + s(1 + 1/2))\, ds$$

$$= 1 + t\int_0^1 (1 + s(1+1/2))\, ds$$

$$= 1 + t\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$$

Επαγωγικα εχουμε

$$y_n(t) = 1 + t\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + t\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}\right)$$

Αρα

$$\lim_n y_n(t) = 1 + t\left(\frac{1}{1 - 1/2}\right) = 1 + 2t$$

$y(t) = \lim y_n(t) = 1 + 2t$ Ειναι λυση της ολοκλ. εξισ.

στ) Μεθοδος επαναληπτικων πυρηνων

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds$$

Εστω $y_0(t) = f(t)$

$$y_1(t) = f(t) + \lambda \cdot \underbrace{\int_a^b K(t,s)\, y_0(s)\, ds}_{\varphi_1(t)} = f(t) + \lambda \cdot \varphi_1(t)$$

οπου $\phi_1(t) = \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds$

Στη συνεχεια

$$y_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, y_1(s)\, ds$$

$$= f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\left(f(s) + \lambda \int_a^b K(s,u)\, f(u)\, du\right) ds$$